استخدام التكامل في تطبيقات فيزيائية.

لقد درست في التفاضل أن السرعة مشتقة المسافة بالنسبة للزمن،

وأن العجلة أو التسارع عبارة عن مشتقة

السرعة بالنسبة للزمن، ويمكننا التعبير عنها بالصيغة الرياضية الآتية :

إذا كان : ف(ن) دالة المسافة بالنسبة للزمن فإن :

ع(ن) دالة السرعة بالنسبة للزمن ،

ت(ن) دالة التسارع بالنسبة للزمن .

$$\text{ف(ن)} \underset{\text{بالتكامل}}{\overset{\text{بالاشتقاق}}{\rightleftarrows}} \text{ع(ن)} \underset{\text{بالتكامل}}{\overset{\text{بالاشتقاق}}{\rightleftarrows}} \text{ت(ن)}$$

تدريب

إذا سقط جسم بسرعة ابتدائية ١٥م/ث وكانت الجاذبية الأرضية ١٠م/ث^{٢} .
فأوجد العلاقة بين سرعة الجسم والزمن
وبعد كم ثانية تصبح سرعته ٢٥م/ث .

الحل :

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ١٠ ومنه ع = ١٠ن + ث

١٥ = ١٠ × ٠ + ث ومنها ث = ١٥

العلاقة ع = ١٠ن + ١٥

⇐ ٢٥ = ١٠ن + ١٥

ومنها ن = ٢ ثانية .

إذا كانت السرعة الإبتدائية لجسم متحرك هي ع= ٢م/ث وتسارعه يساوي ن في أي لحظة فما سرعة هذا الجسم بعد $\frac{\pi}{٢}$ ث ؟

الحل :

ع(ن) = $\int$ ت(ن) .دن = $\int$ ن .دن = $\frac{١}{٢}$ن^{٢} + ث$_{١}$

٢ = ٠ + ث$_{١}$ ⇐ ث$_{١}$ = ٢

ع(ن) = $\frac{١}{٢}$ن^{٢} + ٢

ع($\frac{\pi}{٢}$) = $\frac{\pi^{٢}}{٨}$ + ٢

ملاحظات مهمة :

١) يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع له، أو يكون في حالة سكون لحظي، أو يتوقف عن الحركة، أو تنعدم سرعته عندما ع(ن) = ٠

٢) إذا طلب إيجاد الموضع الابتدائي للجسم نعوض ن= ٠ في دالة المسافة أي نجد ف(٠).

٣) إذا طلب إيجاد السرعة الابتدائية نعوض ن= ٠ في دالة السرعة أي نجد ع(٠) .

٤) إذا طلب إيجاد التسارع الابتدائي نعوض ن= ٠ في دالة التسارع أي نجد ت (٠) .

تدريب

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم من نقطة الأصل ،

فإذا كانت عجلتها في اللحظة ن تعطى بالعلاقة :

ت (ن) = ٣ + ٢ن سم/ث^{٢} وكانت سرعتها الابتدائية

ع (٠) = ٤سم/ث ، أوجد :

أ) السرعة عند أي لحظة ن.

ب) المسافة المقطوعة خلال الثواني الأربعة الأولى من بدء الحركة.

أ) ع(ن) = $\int$ ت(ن) ءن = $\int$ (٣ + ٢ن) . ءن

= ٣ن + ن^{٢} + ث$_{١}$

$\because$ ع(٠) = ٤

$\therefore$ ث$_{١}$ = ٤

$\therefore$ ع(ن) = ٣ن + ن^{٢} + ٤

ب) ف(ن) = $\int$ ع(ن) . ءن

= $\int$ (٣ن + ن^{٢} + ٤) . ءن

= $\frac{٣}{٢}$ ن^{٢} + $\frac{١}{٣}$ن^{٣} + ٤ن + ث$_{٢}$

$\because$ ف(٠) = ٠ $\Longleftarrow$ ث$_{٢}$ = ٠ ،

$\therefore$ ف(ن) = $\frac{٣}{٢}$ ن^{٢} + $\frac{١}{٣}$ن^{٣} + ٤ن

$\therefore$ ف(٤) = $\frac{١٨٤}{٣}$ سم

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم مبتدئة بنقطة الأصل بعجلة ت(ن) = ٣ + ٢ ن سم/ث^{٢} ، إذا كانت سرعتها الابتدائية ٤سم/ث أوجد :

أ) السرعة عند أي لحظة ن .

ب) المسافة المقطوعة خلال الثواني الثمان الأولى من بدء الحركة .

٣) أ) ع(ن) = ٣ن + ن^{٢} + ٤

ب) ف(٨) = $\frac{٨٩٦}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$ ٢٩٨سم

إذا كان تسارع جسيم ت(ن) = ٦ن − $\frac{٣}{\sqrt{ن}}$ فأوجد المسافة والسرعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة إذا علمت أن المسافة ٩ متر والسرعة ٥ م/ث بعد ثانية واحدة من بدء حركته .

٨) ع(ن) = $\int$ ت(ن) = ٣ن^{٢} − ٦ن$^{\frac{١}{٢}}$ + ث

$\therefore$ ع(١) = ٥

$\therefore$ ع(١) = ٥ $\Longleftarrow$ ٥ = ٣ − ٦ + ث

$\therefore$ ث = ٨

$\therefore$ ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٦ن$^{\frac{١}{٢}}$ + ٨

ف(ن) = $\int$ ع(ن) = ن^{٣} − ٦ × $\frac{٢}{٣}$ن$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٨ن + ث

$\therefore$ ف(ن) = ن^{٣} − ٤ن$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٨ن + ث .

$\therefore$ ف(١) = ٩

$\therefore$ ف(١) = ٩ = ١ − ٤ + ٨ + ث

$\therefore$ ث = ٤

$\therefore$ ف(ن) = ن^{٣} − ٤ن$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٨ن + ٤

$\therefore$ ع(٤) = ٣ (٤)^{٢} − ٦ × $\sqrt{٤}$ + ٨ = ٤٤

ف(٤) = (٤)^{٣} − ٤ (٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٨ × ٤ + ٤

= ٦٤ − ٣٢ + ٣٢ + ٤ = ٦٨

$\therefore$ ف(٤) = ٦٨

قذفت كرة رأسيا إلى أعلى من نقطة على ارتفاع ٨٠مترًا من سطح الأرض بسرعة ابتدائية تساوي ٣٠متر/ث ، إذا كانت السرعة تعطى بالعلاقة : ع(ن)= ٣٠ − ١٠ ن احسب :

أ) موقع الكرة بعد زمن قدره ن .

ب) الزمن المستغرق حتى تصل الكرة إلى الأرض .

جـ) أقصى ارتفاع يمكن أن تصل إليه الكرة .

٩)أ) ∵ ع (٠) = ٣٠م/ث ، ع(ن)= ٣٠−١٠ن

∴ ف(ن) = $\int$ ع(ن) . ءن = $\int$ (٣٠−١٠ن) . ءن

ف(ن)= ٣٠ن− ٥ن^{٢} + ث $\Longleftarrow$ ث = ٨٠

∴ ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} + ٨٠

ب) ٣٠ن −٥ن^{٢} +٨٠ = ٠

$\Longleftarrow$ ٥(ن^{٢}− ٦ن −١٦) = ٠

٥(ن −٨) (ن +٢) = ٠

$\Longleftarrow$ اما ن= ٨ أون= −٢مرفوض

∴ الزمن المستغرق حتى تصل الكرة للأرض

٨ ثوان .

جـ) أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة

عند ع = ٠

$\Longleftarrow$ ٣٠ −١٠ن = ٠ $\Longleftarrow$ ن= ٣ ثوانٍ

∴ ف(٣) = ٩٠ −٤٥ + ٨٠ =١٢٥ مترًا (عن سطح الأرض).

تطبيقات هندسية

إذا علم ميل المماس $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لمنحنى عند أي نقطة عليه (س ، ص)، فإن معادلة المنحنى ص = د(س) تعطى بالعلاقة :

$$\text{ص = د(س) معادلة المنحنى} \underset{\text{بالتكامل}}{\overset{\text{بالاشتقاق}}{\rightleftarrows}} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{ ميل المماس للمنحنى}$$

أن معنى نقطة تنتمي إلى المنحنى أي أنها تحقق تلك المعادلة .

منحنى يمر بالنقطتين (-١ ، ٩) ، (٢ ، -٣) وميله عند أي نقطة يساوي (أس − ٥) . أوجد قيمة أ ، ثم أوجد معادلة المنحنى .

الحل :

ميل المنحنى م عند أي نقطة = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أس − ٥

ص = $\int$(أس − ٥) .دس = $\frac{1}{2}$ أ$\text{س}^{٢}$ − ٥س + ث

المنحنى يمر بالنقطة (-١،٩) :

٩ = $\frac{1}{2}$ أ × $(-١)^{٢}$ − (٥ × -١) + ث ⟵ ٩ = $\frac{1}{2}$أ + ٥ + ث

$\frac{1}{2}$ أ + ث = ٤ ....(١)

المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، -٣) :

-٣ = $\frac{1}{2}$ أ × $(٢)^{٢}$ − (٥ × ٢) + ث ⟵ -٣ = ٢ أ − ١٠ + ث

٢ أ + ث = ٧ ....(٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج أن : ث = ٣ ، أ = ٢

معادلة المنحنى هي : ص = $\text{س}^{٢}$ − ٥س + ٣

إذا كان ميل العمود على منحنى ص= د(س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) هو $\frac{\text{٥ + ٢ص}}{\text{٢ − ٣}\text{س}^{٢}}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (١،٢) ، فأوجد معادلته ؟

الحل :

ميل العمود على منحنى $\frac{\text{٥ + ٢ص}}{\text{٢ − ٣}\text{س}^{٢}}$

∴ ميل المماس للمنحنى = $\frac{\text{٣}\text{س}^{٢}\text{ − ٢}}{\text{٥ + ٢ص}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٣}\text{س}^{٢}\text{ − ٢}}{\text{٥ + ٢ص}}$

∴ $\int$(٥ + ٢ص)دص = $\int$(٣$\text{س}^{٢}$ − ٢)دس

$\text{ص}^{٢}$ + ٥ص = $\text{س}^{٣}$ − ٢س + ث

∵ (١ ، ٢) ∈ المنحنى ⟸ ث = ١٥

⟸ $\text{ص}^{٢}$ + ٥ص = $\text{س}^{٣}$ − ٢س + ١٥

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ق(س) عند النقطة (١ ، -١) يساوي ١٠ حيث إن ق̋(س) = ١٨س − ٨ ، أوجد ق(س).

الحل:-

∵ الميل م= قَ(١) = ١٠ ، ق̋(س) =١٨س − ٨

∴ قَ(س) = $\int$ ق̋(س) دس

= ٩$\text{س}^{٢}$ − ٨س + $\text{ث}_{١}$

قَ(١) = ٩ − ٨ + $\text{ث}_{١}$ = ١٠ ⟸ $\text{ث}_{١}$ = ٩

∴ قَ(س) = ٩$\text{س}^{٢}$ − ٨س + ٩

∴ ق(س) = $\int$(٩$\text{س}^{٢}$ − ٨س + ٩) دس

= ٣$\text{س}^{٣}$ − ٤$\text{س}^{٢}$ + ٩س + $\text{ث}_{٢}$

∵ ق(١) = -١ ⟸ $\text{ث}_{٢}$ = -٩

∴ ق(س) = ٣$\text{س}^{٣}$ − ٤$\text{س}^{٢}$ + ٩س − ٩ .

٥ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة (س ، ص) عليه يساوي $\frac{\text{٢س}}{\text{ص}}$ فأوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٢) .

٦ إذا كان ميل المماس لمنحنى هو ٦س وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٤) فأوجد معادلة هذا المنحنى.

٧ أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (١ ، −٢) الذي ميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوي $\text{س}^{٢}(\text{١٥} - \text{س})$.

الحل:

٥)
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢س}}{\text{ص}}$$
$$\text{ص ءص} = \text{٢س ءس}$$
$$\frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ث}$$
$$\text{ص}^{٢} = \text{٢س}^{٢} + \text{ث}$$
$$٤ = ٢ + \text{ث}$$
$$\therefore \boxed{\text{ث} = ٢}$$
$$\text{ص}^{٢} = \text{٢س}^{٢} + ٢$$

٦)
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦س}$$
$$\text{ص} = \text{٣س}^{٢} + \text{ث}$$
$$٤ = ٣ + \text{ث}$$
$$\Leftarrow \boxed{\text{ث} = ١}$$
$$\therefore \text{ص} = \text{٣س}^{٢} + ١$$

٧)
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{٢}(\text{١٥} - \text{س})$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{١٥س}^{٢} - \text{س}^{٣}$$
$$\text{ص} = \text{٥س}^{٣} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \text{ث}$$
$$-٢ = ٥ - \frac{١}{٤} + \text{ث}$$
$$\text{ث} = \frac{-٢٧}{٤}$$
$$\therefore \text{ص} = \text{٥س}^{٣} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٢٧}{٤}$$

١١ إذا كان معدل تغير مساحة سطح صفيحة معدنية (م) بالنسبة للزمن ن بالدقيقة يعطى بالعلاقة:

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{١}{١٨٠}(\text{٣ن}^{٢} + \text{٢ن})$$

أوجد مساحة سطح هذه الصفيحة عند بدء التسخين إذا علم أن م=١٥٢م² عندما ن = ١٥ دقيقة.

١١) $\text{م} = \int \frac{١}{١٨٠}(\text{٣ن}^{٢} + \text{٢ن}) \cdot \text{ءن} = \frac{١}{١٨٠}(\text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢}) + \text{ث}$

∴ م = ١٥٢ عندما ن=١٥

$\therefore ١٥٢ = \frac{١}{١٨٠}(٣٣٧٥ + ٢٢٥) + \text{ث}$

$\therefore \text{ث} = ١٣٢$

$\therefore \text{م} = \frac{١}{١٨٠}(\text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢}) + ١٣٢$ ، عندما ن= ٠ فإن م= ١٣٢م²